Métodos Numéricos
5 de junio de 2017
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

- ☐ Resolver ejercicios en hojas separadas
- ☐ Completar nombre en las hojas
- ☐ Completar LU y nombre en el enunciado
- ☐ **Justificar** **<u>todas</u>** **las respuestas**

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota
25	20	21	13	79 (A)

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la siguiente matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcular los autovalores y una base ortonormal de autovectores de A. (5 puntos)

   (b) Si $\alpha = 1$, explicar qué sucede cuando aplicamos el método de las potencias a A, comenzando con el vector $x_0 = (1,0)$ y comenzando con el vector $x_0 = (1,-1)$. ¿Converge el método en cualquier caso a un autovalor dominante? ¿Por qué? (10 puntos)

   (c) Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales las dos sucesiones del método de las potencias comenzando con los vectores $x_0 = (1,0)$ y $x_0 = (1,-1)$ convergen al autovalor dominante. (10 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible, y $A^tA = LL^t$ la factorización de Cholesky de A^tA.

   (a) Sea $Q = AL^{-t}$. Demostrar que Q es ortogonal y que si $R = L^t$ entonces $A = QR$ es una factorización QR de A, con R triangular superior. (5 puntos)

   (b) Sean Q y R las matrices de la factorización QR del item anterior, y sea $R = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de la matriz R. Siendo $\widehat{U} = QU$, demostrar que $A = \widehat{U}\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de A. Justificar. (10 puntos)

   (c) Sea L una matriz diagonal (con elementos positivos en la diagonal) tal que LL^t es una descomposición de Cholesky de A^tA. Calcular una factorización SVD de la matriz $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha > 0$. Explicitar cómo depende la factorización hallada de los valores de A y L. (12 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\omega > 0$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares de A, con $u_1, \ldots, u_n$ las columnas de la matriz U. Consideremos el siguiente esquema iterativo:

$$x^{(k+1)} = -\omega U\Sigma(U\Sigma)^t x^{(k)} + u_i \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$(I+\omega . AA^t)$

   (a) Demostrar que si el esquema converge, lo hace a una solución del sistema $\cancel{(I + AA^t)}x = u_i$. (10 puntos)

   (b) Determinar los valores de ω que hacen converger al esquema iterativo. (13 puntos)

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz simétrica definida positiva, siendo $M = LL^t$ su factorización de Cholesky. Se desea resolver el siguiente problema de minimización (cuadrados mínimos generalizado):

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} (Ax-b)^t M (Ax-b)$$

   (a) Probar que x^* es solución del problema si y sólo si $A^tMAx^* = A^tMb$. (12 puntos)

   (b) Probar que la solución x^* del problema es única si y sólo si la solución de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$ es única. (13 puntos)

05/06/17

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

a) Busco los autovalores con el polinomio característico:

- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - \alpha^2$

$= 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \alpha^2 = \lambda^2 - 2\lambda + (1-\alpha^2)$

Las raíces (los autovalores) serán: $\dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(1-\alpha^2)}}{2}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{4\alpha^2}}{2} = \dfrac{2 \pm (2|\alpha|)}{2} = \dfrac{2}{2}(1 \pm |\alpha|) = 1 \pm |\alpha|$

Autovalores: $\boxed{\{1+\alpha ; 1-\alpha\}}$ ✓

Busco autovectores:

$\alpha \neq 0$ (NOTA AL DORSO sobre α)

$1+\alpha$

- $\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \alpha x_1 = \alpha x_2$

Tomo $x = (\alpha ; \alpha)$ normalizado: $\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2}}(\alpha ; \alpha)}$ ✓

$1-\alpha$

- $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \alpha x_1 = \alpha - x_2$

Tomo $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2}}(-\alpha ; \alpha)}$ ✓

Nótese que $\|v_1\|_2 = \|v_2\|_2 = 1$, y que $<v_1 ; v_2> = 0$:

$$<(-\alpha;\alpha);(\alpha;\alpha)> = -\alpha^2+\alpha^2 = 0 \checkmark$$

- $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(-\alpha;\alpha); \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)\right\}$ autovectores ✓
- $\left\{1-\alpha ; 1+\alpha\right\}$ autovalores ✓

[• NOTA: si $\alpha = 0$ es un caso aparte, pero trivial: $A = I$, los autovectores serán $\{e_1 ; e_2\}$ y los autovalores $\{1;1\}$. (B)]

b) Si $\alpha = 1$ el autovalor dominante es $1+\alpha = 2$, y su autovector asociado $\frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;1) = v_1$.

Sabemos que para que el método de las potencias converja, el x_0 debe poder escribirse como comb. lineal de la base de autovectores donde el coeficiente del autovector asociado al autovalor dominante no debe ser nulo (hay otros requisitos, pero éste es uno de ellos). Veamos:

- $x_0 = (1,0) = \mu_1 (1/\sqrt{2} ; 1/\sqrt{2}) + \mu_2(-1/\sqrt{2} ; 1/\sqrt{2})$

μ_1 no puede ser nulo pues $(1;0)$ no es un múltiplo de $v_2 = (-1/\sqrt{2} ; 1/\sqrt{2})$. Luego el requisito se satisface. ✓

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;1) \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1;1) \end{array} \right.$$

- $x_0 = (1;-1) = 0 . v_1 + (-\sqrt{2}) . (-1/\sqrt{2} ; 1/\sqrt{2})$

Aquí el coef. de v_1 es nulo, por lo que no cumple con el requisito necesario. ✓

Si bien en ambos casos hay un autovalor dominante, en el segundo caso no se cumple la condición explicada, y no converge. En el primero sí.

. Cuidado!! Se pedía ver qué sucede. B⁻

c) Buscamos los "α" / las coordenadas de $x_0 = (1,0)$ y de $x_0 = (1;-1)$ en la base $\left\{ \frac{1}{2|\alpha|}(-\alpha;\alpha) ; \frac{1}{2|\alpha|}(\alpha;\alpha) \right\}$ no sean nulas en el autovector "dominante". Además, debe haber un autovalor mayor a otro en valor absoluto:

$$|1-\alpha| = |1+\alpha| \Leftrightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha \neq 0}$$

(Aunque ya no lo teníamos en cuenta) ✓

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

- Si $\alpha < 0 \Rightarrow |1-\alpha| > |1+\alpha| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(-\alpha;\alpha)$ dominante
- Si $\alpha > 0 \Rightarrow |1-\alpha| < |1+\alpha| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)$ dominante ✓

$\underset{\sim\sim}{\alpha > 0}$

No queremos que $(1,0)$ ni $(1;-1)$ sean múltiplos de $\frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(-\alpha;\alpha)$ porque si no tendrían cero en la coordenada de $\frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)$.

Notemos que $\nexists\ \alpha / (1;-1) \not\parallel \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(-\alpha;\alpha)$. Siempre serán paralelos: $-\sqrt{2}|\alpha|/(\alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(-\alpha;\alpha) = (1;-1)$.

Luego, $\alpha \notin (0;+\infty)$ ✓

$\underline{\alpha < 0}$

No queremos que ni $(1;0)$ ni $(1;-1)$ [redacted] sean múltiplos de $\frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)$.

- $\nexists\, \mu \in \mathbb{R} \,/\, (1;0) = \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)$ ✓

  pues $(1;0) \not\parallel \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)$

- $\nexists\, \mu \in \mathbb{R} \,/\, (1;-1) = \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)$ ✓

  pues $(1;-1) \not\parallel \frac{1}{\sqrt{2}|\alpha|}(\alpha;\alpha)$

Luego vale para cualquier $\alpha < 0$. ✓

Como se tiene un autovalor dominante y los vectores $(1;0)$ y $(1;-1)$ no tienen coordenada nula en el autovector asociado a dicho autovalor, el método converge en ambos casos:

$$\boxed{\alpha \in (-\infty; 0)}$$ ✓

¿Si $\alpha = 0$ el método converge?

B

② $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible, $A^tA = LL^t$ Cholesky.

a) $Q = AL^{-t}$

(i) Q es ortogonal $\Leftrightarrow$ $Q^t = Q^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $Q^tQ = I$

- $Q^tQ = (AL^{-t})^t AL^{-t} = L^{-1}A^tAL^{-t} = L^{-1}(A^tA)L^{-t}$
$= L^{-1}(LL^t)L^{-t} = (L^{-1}L)(L^tL^{-t}) = II = I$ ✓

Luego, $Q = AL^{-t}$ es ortogonal.

(ii) Nótese que Q es ortogonal y $R = L^t$ es t.s. (traspuesta de una t.i.), luego QR es efectivamente una fac. "QR"; veamos que de A:

- $QR = AL^{-t}R = AL^{-t}L^t = AI = A$ ✓

b) • $R = U\Sigma V^t \Rightarrow QR = QU\Sigma V^t = A = \hat{U}\Sigma V^t$ con $\hat{U} = QU$.

Resaltemos que:

- $\hat{U} = QU$ es producto de ortogonales, por lo que es ortogonal.

- Σ es diag. no elts positivos (o nulos) y ordenados, porque $U\Sigma V^t$ es una SVD.

- V es ortogonal porque $U\Sigma V^t$ es una SVD

Luego $A = \hat{U}\Sigma V^t$ es una SVD. ✓

c) Notemos lo siguiente; por ser L diagonal cuadrada:

- $A = LL^t = L^2 = I L^2 I$ $\qquad$ LL^t es descomp. de Cholesky de A^tA

NO

Se sabe que $l_{ii} > 0 \ \forall i$, y que I es ortogonal. Si L^2 tuviera su diagonal ordenada esto sería la fac. SVD de A. Para obtenerla, ordenamos las filas de L^2 de mayor a menor y luego reordenamos las columnas para formar una diagonal de nuevo. Estas dos cosas las hacemos con permutaciones P_1 y $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $A = I L^2 I = I P_1^t P_1 L^2 P_2 P_2^t I = U \Sigma V^t$

con $U = P_1^t$, $\Sigma = P_1 L^2 P_2$ y $V^t = P_2^t$

(Recordemos que las permutaciones son ortogonales! $P_i = P_i^t$)

Esto efectivamente es una SVD, pues Σ es diag. con elem. positivos ordenados, y P_1^t, P_2^t son ortogonales.

Ahora propongo:

- $$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma V^t & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\Sigma V^t & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \checkmark$$

Esta es, como antes, casi una SVD :

$(\tilde{U})$ • $\left[\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ es ortogonal, pues U lo es y las filas y columnas se extienden con ceros, y la nueva fila/col. es el canónico de la dimensión "nueva", por lo que es ortogonal y ortonormal a las demás filas.

$(\tilde{V}^t)$ • $\left[\begin{array}{c|c} V^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ es ortogonal, pues V^t lo es y... ["mismo razonamiento que antes"].

$(\tilde{\Sigma})$ • $\left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right]$ tiene eltos no negativos y es diagonal, pero podría no estar ordenada (no se sabe el valor de α). Aplicando, como antes, permutaciones de filas y columnas podemos obtener la SVD final.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right] = \underbrace{\tilde{U} P_3^t}\underbrace{P_3 \tilde{\Sigma} P_4}\underbrace{P_4^t \tilde{V}^t} = \overline{U}\,\overline{\Sigma}\,\overline{V}^t$$

Donde P_3 y P_4 ordenan la diagonal $\tilde{\Sigma}$ de manera creciente. ($P_3, P_4 \in \mathbb{R}^{n+1 \times m+1}$)

Finalmente:

- $\bar{U} = \tilde{U} P_3^t = \left[\begin{array}{c|c} P_1^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] P_3^t$ ortogonal

- $\bar{\Sigma} = P_3 \tilde{\Sigma} P_4 = P_3 \left[\begin{array}{c|c} P_1 L^2 P_2 & 0 \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right] P_4$ diag. posit y ordenada.

- $\bar{V}^t = P_4^t \tilde{V}^t = P_4^t \left[\begin{array}{c|c} P_2^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ ortogonal

Las 4 permutaciones (que pueden pensarse como 2) dependerán del orden que tengan los eltos. de la diagonal de L en la fac. de Cholesky de A, y de α.

todo el desarrollo está OK!
Salvo que partís de $A = LL^t$ mientras que el enunciado dice que $\underline{A^tA = LL^t}$

③ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\omega > 0$, $A = U\Sigma V^t$

$u_1 \dots u_n$ columnas de U.

$$x^{(k+1)} = -\omega U\Sigma(U\Sigma)^t x^{(k)} + u_i$$

a) Supongamos que $\{x^{(k)}\}_k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.

Luego $-\omega U\Sigma(U\Sigma)^t x^{(k)} + u_i \xrightarrow{k\to\infty} -\omega U\Sigma(U\Sigma)^t x^* + u_i$ por ser una función continua. Luego resolvemos:

- $x^* = -\omega U\Sigma(U\Sigma)^t x^* + u_i = -\omega U\Sigma\Sigma^t U^t x^* + u_i$

$x^* = -\omega U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t x^* + u_i$ ($VV^t = I$ por ser ortogonal)

$x^* = -\omega (U\Sigma V^t)(U\Sigma V^t)^t x^* + u_i$

$x^* = -\omega AA^t x^* + u_i$

$\Leftrightarrow \boxed{(I + \omega AA^t)x^* = u_i}$ ✓

Quod erat demonstrandum. Converge a una solución de tal cosa.

b) La matriz que gobierna la iteración es

$T = -\omega U\Sigma(U\Sigma)^t = -\omega AA^t$

Sabemos que las sucesiones del tipo $x^{(k+1)} = T x^{(k)} + C$ convergen $\Leftrightarrow \rho(T) < 1$. Analicemos el radio espectral de T.

Notemos primero que si $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ son los autoval. de B, luego $\{\beta\lambda_1, \dots \beta\lambda_n\}$ son los de $\beta . B$, con $\beta \neq 0$:

Sea v_i autovec. de $B \Rightarrow Bv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow (\beta . B)v_i = (\lambda_i \beta)v_i$ ✓

$\Leftarrow$ $\Leftarrow$ (vale la vuelta, las necesito para que $\beta\lambda_i$ sean TODOS los autoval. de βB)

Es decir, si $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ son los autovalores de AA^t, luego los de T son $\{-\omega\lambda_1, \dots -\omega\lambda_n\}$. Como corolario, $\rho(T) = \rho(AA^t)\,|\omega| = \rho(AA^t)\,.\,\omega$

- $\rho(T) < 1 \iff \omega\,\rho(AA^t) < 1$

Ahora recordemos que los valores singulares de A son [redacted] las raíces cuadradas de los autovalores de AA^t. Luego $\sigma_1^2 = \rho(AA^t)$ (con σ_i los elts en la diagonal de Σ y σ_1 el primero y más grande).

$$\Longrightarrow \boxed{\omega\,.\,\sigma_1^2 < 1}$$

Si $\sigma_1 \neq 0 \Longrightarrow \omega < 1/\sigma_1^2$

05/06/17

(4) $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^{m}$, $M\in\mathbb{R}^{m\times m}$ s.d.p.

$M = LL^t$: Cholesky. Se quiere minimizar:

- $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (Ax-b)^t M (Ax-b)$

a) $\bullet\ (Ax-b)^t M (Ax-b) = (Ax-b)^t LL^t (Ax-b)$

$= \left[L^t(Ax-b)\right]^t L^t(Ax-b) = \| L^t(Ax-b)\|_2^2$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (Ax-b)^t M (Ax-b) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \| L^t(Ax-b)\|_2^2$

$= \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \| L^tAx - L^tb\|_2^2$

Expresamos nuestro problema de CM en uno de la forma "$\tilde{A}x = \tilde{b}$", con $\tilde{A} = L^tA$ y $\tilde{b} = L^tb$. Esto podemos resolverlo con ecuaciones normales:

- $\tilde{A}^t\tilde{A}x = \tilde{A}^t\tilde{b} = (L^tA)^t L^tAx = (L^tA)^t b$?

$= A^tLL^tAx = A^tMAx = A^tLL^tb = A^tMb$

$\Rightarrow$ El x que buscamos es solución de

$$\boxed{A^tMAx = A^tMb}$$

(podría haber más de una).

b) Se sabe que la sol. de CM para $\bar{A}x=\bar{b}$ es única $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ tiene rango máximo $\Leftrightarrow$ $\bar{A}^t\bar{A}$ es inversible.

$\Rightarrow$) Queremos ver que x^* sol. única con $\bar{A}=L^tA \Rightarrow x^*$ sol. única con $\bar{A}=A$.

Sabemos que L^tA tiene rango máximo, y que A^tMA es inversible. Supongamos que A no tiene rango máximo (habría más de una sol.). Luego tiene dos (o más) columnas l.d. Al multiplicar MA se obtendrán columnas (dos o más) l.d. pues M es una transf. lineal. Al multiplicar A^tMA pasa lo mismo, dejando columnas l.d. Pero A^tMA es inversible, no puede tener columnas l.d. $\rightarrow$ ABSURDO! Luego, A tiene rango máximo.

La idea está bien

(MÁS EXPLICACIÓN DE LO DE ARRIBA:)

$$BV = B\begin{bmatrix} | & | \\ v & \alpha v \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ Bv & \alpha Bv \\ | & | \end{bmatrix}$$

Las columnas de BV $\Rightarrow$ son l.d. porque las de V lo eran.

Ejemplo con 2 columnas, análogo para "n".

Estaría bueno expresar esta propiedad en términos de otras herramientas vistas en la materia. Ej: Núcleo

P/ formalizar.

($\Leftarrow$) Queremos ver que x^* es sol única con $\bar{A}=A \Rightarrow$ x^* es sol única con $\bar{A} = L^t A$

Sabemos que A^tA es invertible. Supongamos que A^tMA no lo es: $\exists v \neq 0 / A^tMAv = 0$.
Como A^tA es invertible, A tiene núcleo nulo, pues si existiera un $u \neq 0 / Au = 0$ luego $A^tAu = 0$ (ABSURDITO). Luego la imagen de A es de dimensión igual a "m", pudiendo formar cualquier vector de $\mathbb{R}^m$.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Particularmente los del núcleo de A^t, que debería ser $\{0\}$ para no producir el mismo absurdito ($A^tAu = A^t\tilde{y} = 0$ con $\tilde{y} \in Nu(A^t)$).

Puede generar un subespacio de $\mathbb{R}^m$ de lo de dimensión a lo sumo

Volviendo a la suposición anterior: ojo

Prop: $Nu(A^t) = Im(A)^{\perp}$

$$A^tMAv = 0 = A^tMy = A^tz = 0$$

con $z = My = M(Av)$.
Sabemos que $Nu(A) = \{0\}$ y $v \neq 0 \Rightarrow y = Av \neq 0$.
Sabemos que $Nu(M) = \{0\}$ por ser invertible $\Rightarrow z = My \neq 0$.
Pero si $z \neq 0$ y $A^tz = 0$ luego $z \in Nu(A^t)$, que ya dijimos que era $Nu(A^t) = \{0\}$. $\rightarrow$ ABSURDO!

Proveniente de suponer que A^tMA no es invertible (es decir que hay más de una sol.).

Quod erat demonstrandum.